

© International Baccalaureate Organization 2024

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2024

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2024

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.



Matemáticas: Análisis y Enfoques Nivel Superior Prueba 1

1 de mayo de 2024

Zona A tarde | Zona B tarde | Zona C tarde

Número de convocatoria del alumno

2 horas

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.



Sección A

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.



2. [Puntuación máxima: 5]

Resuelva $3 \times 9^x + 5 \times 3^x - 2 = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

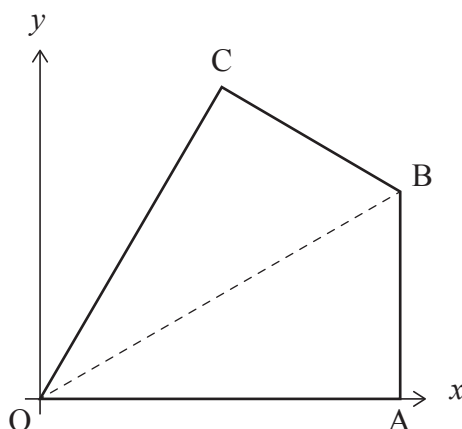
.....

.....



3. [Puntuación máxima: 7]

El cuadrilátero OABC se muestra en los siguientes ejes de coordenadas.



OABC es simétrico respecto a $[OB]$.

A tiene por coordenadas $(6, 0)$ y C tiene por coordenadas $(3, 3\sqrt{3})$.

- (a) (i) Escriba las coordenadas del punto medio de $[AC]$.
- (ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos O y B . [4]
- (b) Sabiendo que $[OA]$ es perpendicular a $[AB]$, halle el área del cuadrilátero OABC . [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



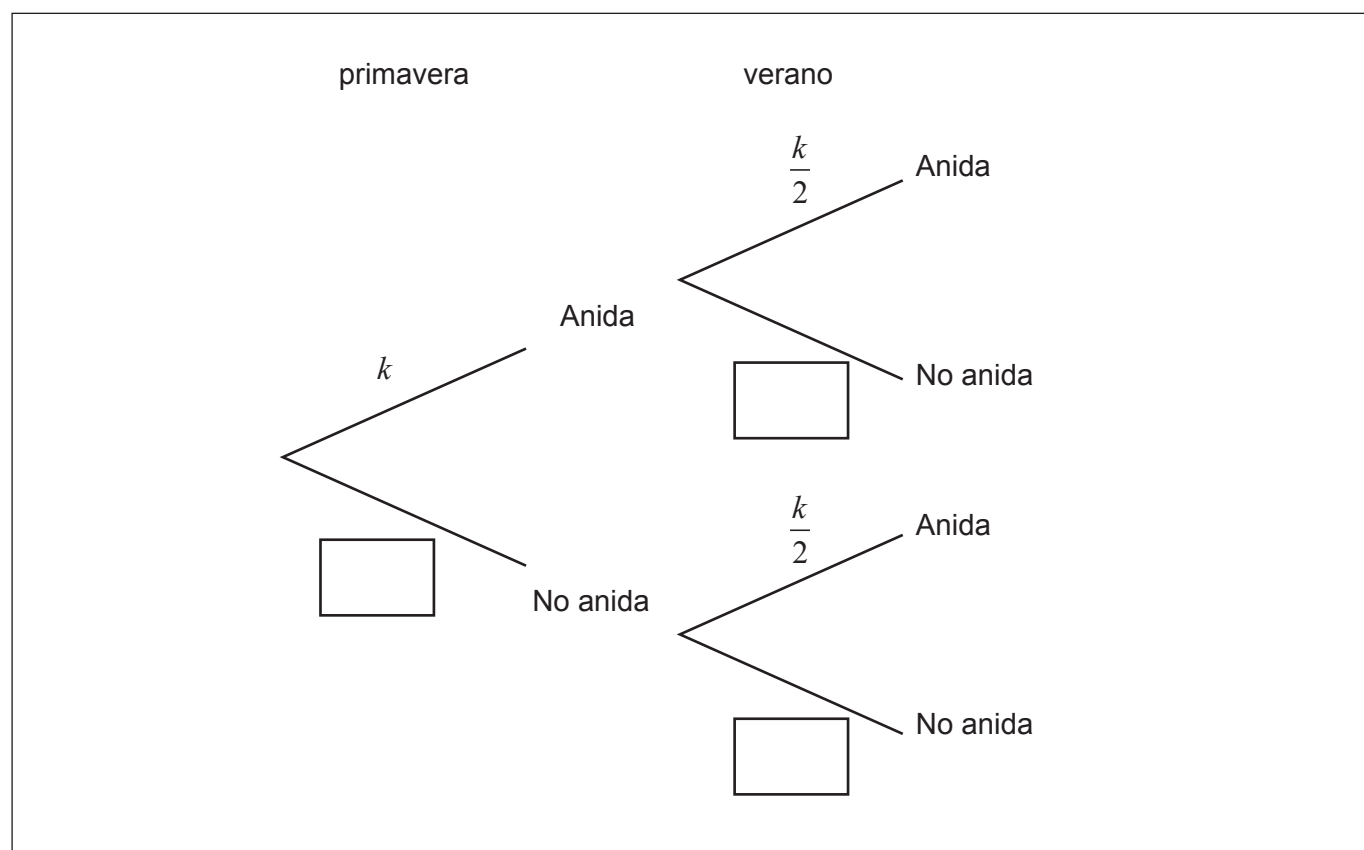
4. [Puntuación máxima: 6]

Una especie de ave puede anidar en dos estaciones: primavera y verano.

La probabilidad de que anide en primavera es igual a k .

La probabilidad de que anide en verano es igual a $\frac{k}{2}$.

Toda esta información se muestra en el siguiente diagrama de árbol.



- (a) Complete el diagrama de árbol para mostrar, para cada estación, las probabilidades de que no anide. Escriba las respuestas en función de k .

[2]

Se sabe que la probabilidad de que no anide ni en primavera ni en verano es igual a $\frac{5}{9}$.

- (b) (i) Muestre que $9k^2 - 27k + 8 = 0$.

- (ii) Tanto $k = \frac{1}{3}$ como $k = \frac{8}{3}$ satisfacen la ecuación $9k^2 - 27k + 8 = 0$.

Indique por qué la única solución válida es $k = \frac{1}{3}$.

[4]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



(Pregunta 4: continuación)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



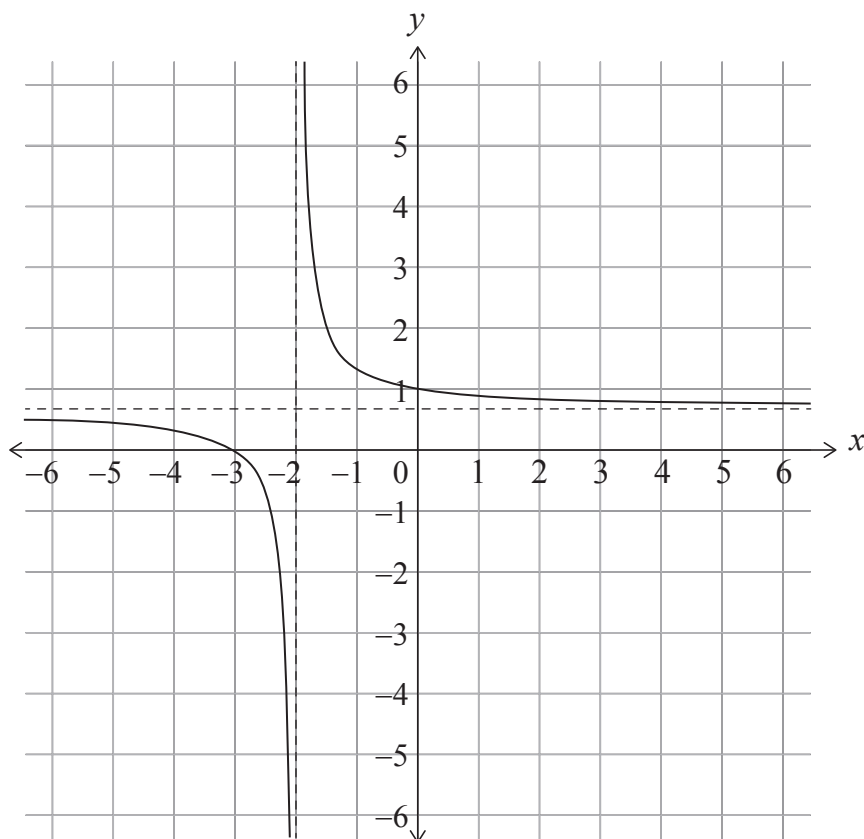
16EP07

Véase al dorso

5. [Puntuación máxima: 8]

La función f se define así: $f(x) = \frac{2(x+3)}{3(x+2)}$, donde $x \in \mathbb{R}, x \neq -2$.

A continuación se muestra el gráfico de $y = f(x)$.



(a) Escriba la ecuación de la asíntota horizontal.

[1]

Considere $g(x) = mx + 1$, donde $m \in \mathbb{R}, m \neq 0$.

(b) (i) Escriba el número de soluciones que tiene $f(x) = g(x)$ para $m > 0$.

(ii) Determine el valor de m para el cual $f(x) = g(x)$ tiene solamente una solución en x .

(iii) Determine el intervalo de valores de m para los cuales $f(x) = g(x)$ tiene dos soluciones para $x \geq 0$.

[7]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



(Pregunta 5: continuación)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP09

Véase al dorso

6. [Puntuación máxima: 5]

Un agricultor cultiva dos tipos de manzanas: manzanas para cocinar y manzanas de mesa. Los pesos de las manzanas (en gramos) se pueden modelizar mediante distribuciones normales, cada una con los siguientes parámetros.

Tipo de manzanas	Media μ	Desviación típica σ
De mesa	100 g	20 g
Para cocinar	140 g	40 g

Para cada tipo de manzanas, se puede suponer que el 95 % de los pesos están dentro de dos desviaciones típicas de la media.

- (a) Halle el porcentaje de manzanas de mesa que pesan más de 140 g. [1]

El agricultor cultiva un gran número de manzanas, de las cuales el 80 % son manzanas de mesa.

Ambos tipos de manzanas se recolectan y se mezclan al azar en una máquina de lavado.

Después de lavarlas, la máquina separa aquellas que tienen un peso mayor que 140 g y las envía a un contenedor.

- (b) Se elige al azar una manzana del contenedor; halle la probabilidad de que sea una manzana de mesa. Dé la respuesta en la forma $\frac{c}{d}$, donde $c, d \in \mathbb{Z}^+$. [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



7. [Puntuación máxima: 7]

La función $g(x)$ se define así: $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + dx - e$, donde $d, e \in \mathbb{R}$.

α , β y γ son las tres raíces de la ecuación $g(x) = 0$, donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(a) Escriba el valor de $\alpha + \beta + \gamma$. [1]

La función $h(z)$ se define así: $h(z) = 2z^5 - 11z^4 + rz^3 + sz^2 + tz - 20$, donde $r, s, t \in \mathbb{R}$.

α , β y γ también son raíces de la ecuación $h(z) = 0$.

Se sabe que el número complejo $z = p + 3i$ satisface la ecuación $h(z) = 0$.

(b) Muestre que $p = 1$. [3]

Ahora se sabe que $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, y que $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha < \beta$ y $\gamma \in \mathbb{Q}$.

(c) (i) Halle el valor del producto $\alpha\beta$.

(ii) Escriba el valor de α y el valor de β . [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



8. [Puntuación máxima: 6]

Utilice la regla de L'Hôpital para hallar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^4 x - \cos^2 x}{x^4 - x^2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



9. [Puntuación máxima: 7]

Un profesor se lleva a n alumnos de viaje de estudios. A los alumnos se les divide al azar en dos grupos.

Por motivos de seguridad tiene que haber exactamente tres alumnos en el primer grupo y al menos tres alumnos en el segundo grupo.

El profesor asignará al azar tres alumnos al primer grupo y el resto de los alumnos al segundo grupo.

- (a) Escriba una expresión que dé el número de maneras distintas en las que se puede repartir a los alumnos.

[1]

Dos de los alumnos le piden al profesor no coincidir en el mismo grupo.

El profesor acepta la petición y, a continuación, se da cuenta de que el número de maneras de repartir a los alumnos es la mitad que antes.

- (b) Determine el valor de n .

[6]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 16]

Considere la progresión aritmética $a, p, q \dots$, donde $a, p, q \neq 0$.

(a) Muestre que $2p - q = a$. [2]

Considere la progresión geométrica $a, s, t \dots$, donde $a, s, t \neq 0$.

(b) Muestre que $s^2 = at$. [2]

El primer término de las dos progresiones es a .

Se sabe que $q = t = 1$.

(c) Muestre que $p > \frac{1}{2}$. [2]

Considere el caso en el que $a = 9$, $s > 0$ y $q = t = 1$.

(d) Escriba los cuatro primeros términos de:

(i) La progresión aritmética

(ii) La progresión geométrica [4]

La progresión aritmética y la geométrica se utilizan para formar una nueva progresión aritmética u_n .

Los tres primeros términos de u_n son $u_1 = 9 + \ln 9$, $u_2 = 5 + \ln 3$, y $u_3 = 1 + \ln 1$.

(e) (i) Halle la diferencia común de la nueva progresión, dándola en función de $\ln 3$.

(ii) Muestre que $\sum_{i=1}^{10} u_i = -90 - 25\ln 3$. [6]



No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 19]

El plano Π_1 tiene por ecuación $2x + 6y - 2z = 5$.

- (a) Verifique que el punto $A\left(2, \frac{1}{2}, 1\right)$ pertenece al plano Π_1 . [1]

El plano Π_2 viene dado por $(k^2 - 6)x + (2k + 3)y + pz = q$, donde $p, q, k \in \mathbb{R}$ y $p \neq 0$.

- (b) En el caso en el que $p = -6$, Π_2 es perpendicular a Π_1 y A pertenece a Π_2 .
Halle el valor de k y el valor de q . [5]

Para los apartados (c), (d) y (e), se sabe ahora que Π_2 es paralelo a Π_1 con $k = 3$.

- (c) Determine el valor de p . [2]

Se sabe también que $q = -\frac{51}{2}$.

La recta que pasa por A y es perpendicular a Π_1 corta a Π_2 en el punto B .

- (d) (i) Halle las coordenadas de B .
(ii) A partir de lo anterior, muestre que la distancia perpendicular entre Π_1 y Π_2 es $\sqrt{11}$. [7]
- (e) Halle la ecuación de un tercer plano Π_3 paralelo a los anteriores, que también esté a una distancia perpendicular de $\sqrt{11}$ de Π_1 . [4]



No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 20]

- (a) Sea $f(x) = (1 - ax)^{-\frac{1}{2}}$, donde $ax < 1$, $a \neq 0$.

Denominamos $f^{(n)}(x)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, a la n -ésima derivada de $f(x)$.

Pruebe mediante inducción que $f^{(n)}(x) = \frac{a^n (2n-1)! (1-ax)^{-\frac{2n+1}{2}}}{2^{2n-1} (n-1)!}$, $n \in \mathbb{Z}^+$. [8]

- (b) Utilizando el apartado (a) o de cualquier otro modo, muestre que la serie de Maclaurin para $f(x) = (1 - ax)^{-\frac{1}{2}}$ llegando hasta (e incluido) el término de x^2 es $1 + \frac{1}{2}ax + \frac{3}{8}a^2x^2$. [2]

- (c) A partir de lo anterior, muestre que $(1 - 2x)^{-\frac{1}{2}}(1 - 4x)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{2 + 6x + 19x^2}{2}$. [4]

- (d) Sabiendo que el desarrollo en serie de $(1 - ax)^{-\frac{1}{2}}$ es convergente para $|ax| < 1$, indique la restricción que hay que imponer a x para que la aproximación $(1 - 2x)^{-\frac{1}{2}}(1 - 4x)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{2 + 6x + 19x^2}{2}$ sea válida. [1]

- (e) Use $x = \frac{1}{10}$ para determinar un valor aproximado de $\sqrt{3}$.

Dé la respuesta en la forma $\frac{c}{d}$, donde $c, d \in \mathbb{Z}^+$. [5]

