Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Medio
Prueba 1

1 de mayo de 2024

Zona A tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

Número de convocatoria del alumno

1 hora 30 minutos

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques NM** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[80 puntos]**.

2224 – 9713

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

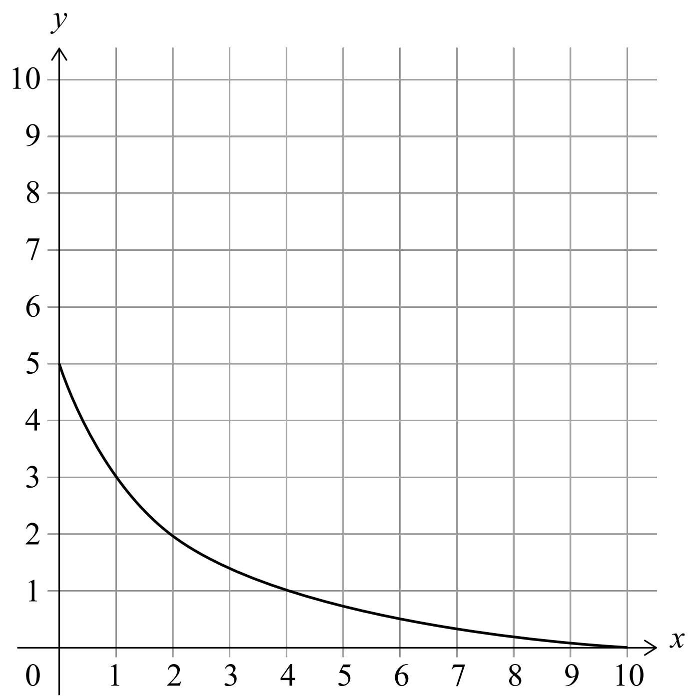
Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

El gráfico de $y = f(x)$ para $0 \le x \le 10$ se muestra en la siguiente figura.

El gráfico corta a los ejes en $(10, 0)$ y en $(0, 5)$.



(a) Escriba el valor de

(i) $f(4)$;

(ii) $f \circ f(4)$;

(iii) $f^{-1}(3)$. [3]

(b) En estos mismos ejes, dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f^{-1}(x)$. Muestre claramente dónde corta el gráfico a los ejes. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

2. [Puntuación máxima: 4]

Resuelva $\tan(2x - 5°) = 1$ para $0° \leq x \leq 180°$.

3. [Puntuación máxima: 5]

(a) Resuelva $3m^2 + 5m - 2 = 0$. [3]

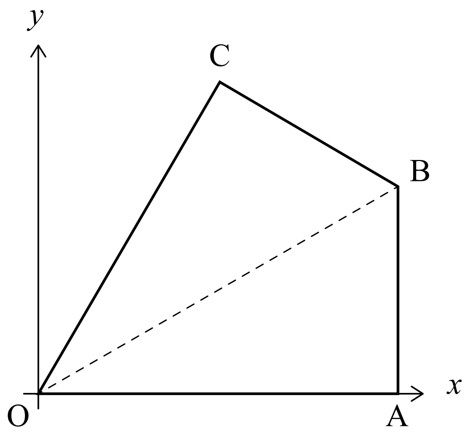
(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, resuelva $3 \times 9^x + 5 \times 3^x - 2 = 0$. [2]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

4. [Puntuación máxima: 7]

El cuadrilátero OABC se muestra en los siguientes ejes de coordenadas.



OABC es simétrico respecto a $[\mathrm{OB}]$.

A tiene por coordenadas $(6, 0)$ y C tiene por coordenadas $\left(3, 3\sqrt{3}\right)$.

(a) (i) Escriba las coordenadas del punto medio de $[\mathrm{AC}]$.

(ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos O y B. [4]

(b) Sabiendo que $[\mathrm{OA}]$ es perpendicular a $[\mathrm{AB}]$, halle el área del cuadrilátero OABC. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

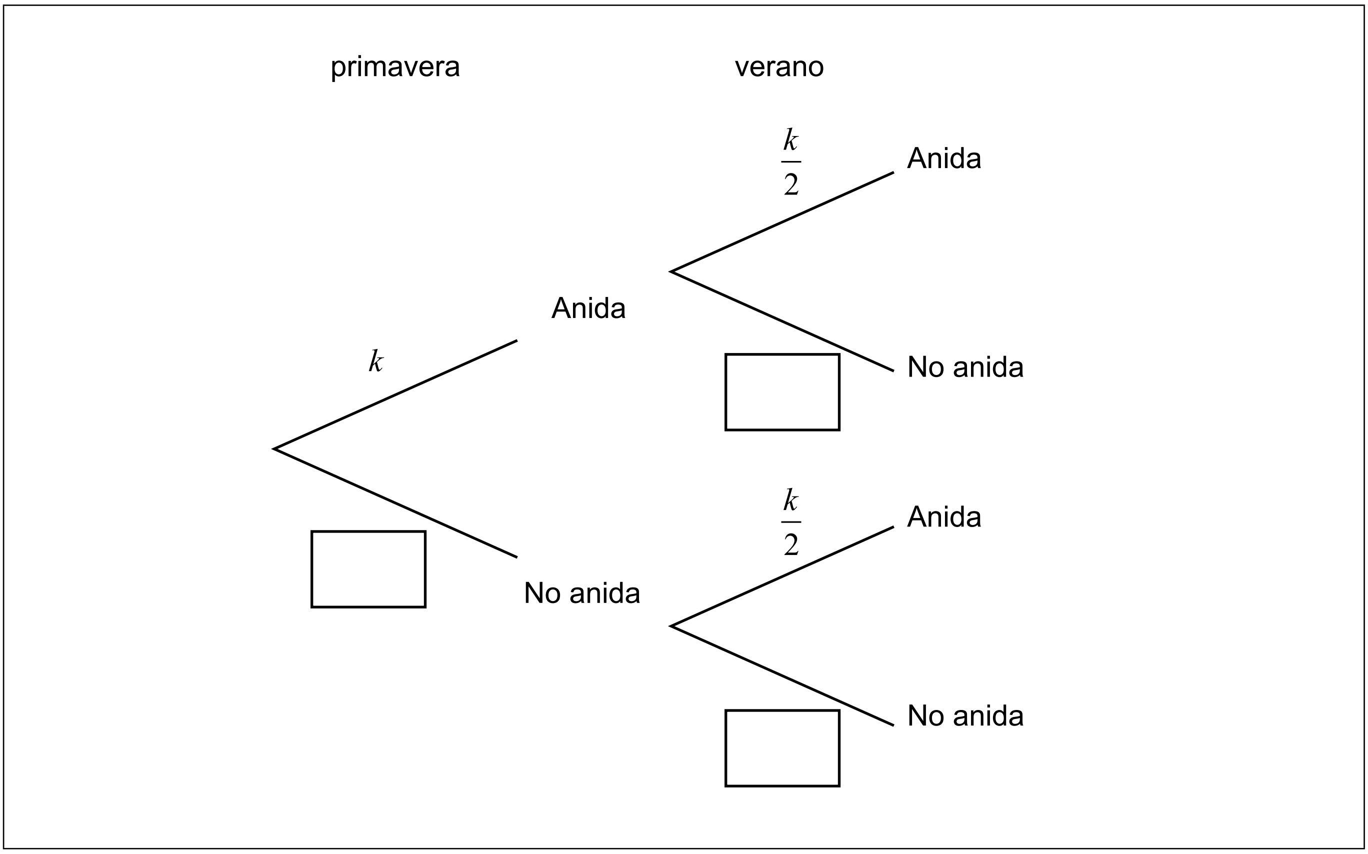
5. [Puntuación máxima: 6]

Una especie de ave puede anidar en dos estaciones: primavera y verano.

La probabilidad de que anide en primavera es igual a k.

La probabilidad de que anide en verano es igual a $\frac{k}{2}$.

Toda esta información se muestra en el siguiente diagrama de árbol.



(a) Complete el diagrama de árbol para mostrar, para cada estación, las probabilidades de que no anide. Escriba las respuestas en función de k. [2]

Se sabe que la probabilidad de que no anide ni en primavera ni en verano es igual a $\frac{5}{9}$.

(b) (i) Muestre que $9k^2 - 27k + 8 = 0$.

(ii) Tanto $k = \frac{1}{3}$ como $k = \frac{8}{3}$ satisfacen la ecuación $9k^2 - 27k + 8 = 0$.

Indique por qué la única solución válida es $k = \frac{1}{3}$. [4]

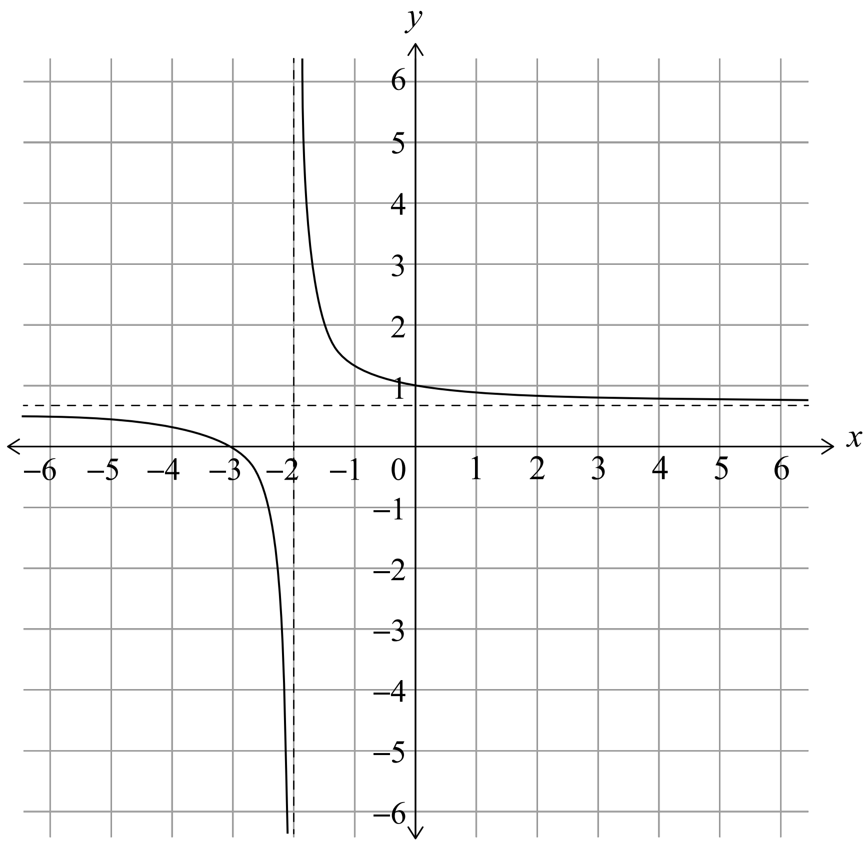
(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 5: continuación)

6. [Puntuación máxima: 8]

La función f se define así: $f\left(x\right)=\dfrac{2\left(x+3\right)}{3\left(x+2\right)}$, donde $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -2$.

A continuación se muestra el gráfico de $y = f(x)$.



(a) Escriba la ecuación de la asíntota horizontal. [1]

Considere $g(x) = mx + 1$, donde $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$.

(b) (i) Escriba el número de soluciones que tiene $f(x) = g(x)$ para $m > 0$.

(ii) Determine el valor de m para el cual $f(x) = g(x)$ tiene solamente una solución en x.

(iii) Determine el intervalo de valores de m para los cuales $f(x) = g(x)$ tiene dos soluciones para $x \geq 0$. [7]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 6: continuación)

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

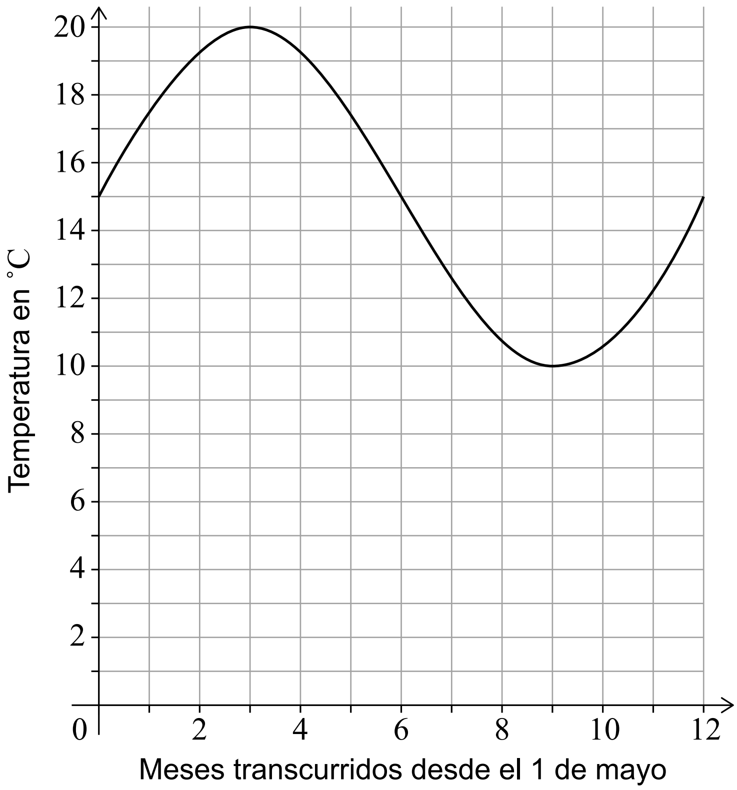
Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

7. [Puntuación máxima: 12]

Alex solo nada en el mar si la temperatura del agua es de al menos $15°\text{C}$. Cada año, Alex va al mar cerca de su casa por primera vez a principios de mayo, cuando el agua ya está lo suficientemente caliente.

Alex modeliza la temperatura del agua al mediodía mediante la función $f(x) = a\,\text{sen}\,bx + \text{c}$ para $0 \le x \le 12$, donde x es el número de meses transcurridos desde el 1 de mayo y donde a, b, $c > 0$.

En la siguiente figura se muestra el gráfico de $y = f(x)$.



(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 7: continuación)

(a) Muestre que $b = \frac{\pi}{6}$. [1]

(b) Escriba el valor de:

(i) a

(ii) c [2]

Alex se va de vacaciones y modeliza la temperatura del agua del mar a mediodía en su lugar de vacaciones mediante la función $g(x) = 3,5 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} x + 11$, donde $0 \le x \le 12$ y x es el número de meses transcurridos desde el 1 de mayo.

(c) Utilizando este nuevo modelo $g(x)$

(i) Halle la temperatura del agua a mediodía el 1 de octubre (es decir, transcurridos cinco meses desde 1 de mayo).

(ii) Muestre que la temperatura del agua a mediodía nunca es lo suficientemente caliente como para que Alex nade. [6]

(d) Alex compara los dos modelos y halla que $g(x) = 0,7 f(x) + q$. Determine el valor de q. [3]

No escriba soluciones en esta página.

8. [Puntuación máxima: 17]

La derivada de una función f viene dada por $f'(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$, para $x \in \mathbb{R}$.

(a) (i) Muestre que $x^2 + 2x + 2 > 0$ para todos los valores de x.

(ii) A partir de lo anterior, halle los valores de x para los cuales f es creciente. [3]

(b) (i) Escriba el valor de x para el cual $f'(x) = 0$.

(ii) Muestre que $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 4x}{(x^2+2x+2)^2}$.

(iii) A partir de lo anterior, justifique que el valor de x que halló en el apartado (b)(i) corresponde a un mínimo local del gráfico de f. [7]

Se sabe que $f(2) = 3 + \ln 10$.

(c) Halle una expresión para $f(x)$. [4]

(d) Halle la ecuación de la normal al gráfico de f en el punto $(2, 3 + \ln 10)$. [3]

No escriba soluciones en esta página.

9. [Puntuación máxima: 16]

Considere la progresión aritmética a, p, $q\ldots$, donde a, p, $q \neq 0$.

(a) Muestre que $2p - q = a$. [2]

Considere la progresión geométrica a, s, $t\ldots$, donde a, s, $t \neq 0$.

(b) Muestre que $s^2 = at$. [2]

El primer término de las dos progresiones es a.

Se sabe que $q = t = 1$.

(c) Muestre que $p > \frac{1}{2}$. [2]

Considere el caso en el que $a = 9$, $s > 0$ y $q = t = 1$.

(d) Escriba los cuatro primeros términos de:

(i) La progresión aritmética

(ii) La progresión geométrica [4]

La progresión aritmética y la geométrica se utilizan para formar una nueva progresión aritmética u_n.

Los tres primeros términos de u_n son $u_1 = 9 + \ln 9$, $u_2 = 5 + \ln 3$, y $u_3 = 1 + \ln 1$.

(e) (i) Halle la diferencia común de la nueva progresión, dándola en función de $\ln 3$.

(ii) Muestre que $\sum_{i=1}^{10} u_i = -90 - 25\ln 3$. [6]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.