Diplomas Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 2

2 de mayo de 2024

Zona A mañana | **Zona B** mañana | **Zona C** mañana

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

2224 – 9711

15 páginas

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 6]

Las funciones f y g se definen ambas para $-1 \le x \le 0$ y vienen dadas por:

$$f(x) = 1 - x^2$$

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x}.$$

Los gráficos de f y g se cortan en $x = a$ y $x = b$, donde $a < b$.

(a) Halle el valor de a y el valor de b. [3]

(b) Halle el área de la región que está delimitada por los gráficos de f y g. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. [Puntuación máxima: 5]

Considere el siguiente conjunto de datos bidimensionales, donde p, $q \in \mathbb{Z}^{+}$.

x	5	6	6	8	10
y	9	13	p	q	21

La recta de regresión de y sobre x tiene por ecuación $y = 2{,}1875x + 0{,}6875$.

Esta recta de regresión pasa por el punto correspondiente a las medias $(\overline{x}, \overline{y})$.

(a) Sabiendo que $\overline{x} = 7$, verifique que $\overline{y} = 16$. [1]

(b) Sabiendo que $q - p = 3$, halle el valor de p y el valor de q. [4]

3. [Puntuación máxima: 6]

El nivel acústico de un sonido (L, medido en decibelios) está relacionado con su intensidad (I unidades) del siguiente modo: $L = 10\log_{10}(I \times 10^{12})$.

Considere dos sonidos: S_1 y S_2.

S_1 tiene una intensidad de 10^{-6} unidades y un nivel acústico de 60 decibelios.

S_2 tiene una intensidad que es el doble que la de S_1.

(a) Indique la intensidad de S_2. [1]

(b) Determine el nivel acústico de S_2. [2]

Durante una tormenta, el máximo nivel acústico de los truenos fue de 115 decibelios.

(c) Halle la correspondiente intensidad (I) de los truenos. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. [Puntuación máxima: 6]

Una partícula se mueve en línea recta de tal modo que su velocidad ($v\,\mathrm{m\,s^{-1}}$) en el instante t segundos viene dada por $v(t) = 1 + \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{sen}\,2t}$ para $0 \le t \le 2$.

(a) Halle la velocidad de la partícula en el instante $t = 2$. [1]

(b) Halle la velocidad máxima de la partícula. [2]

(c) Halle la aceleración de la partícula en el instante en el que cambia de sentido. [3]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

5. [Puntuación máxima: 5]

Considere una variable aleatoria X tal que $X \sim \mathrm{B}(n\,,\, 0{,}25)$.

Determine el menor valor de n para el que se cumple que $\mathrm{P}(X \geq 1) > 0{,}99$.

6. [Puntuación máxima: 6]

El volumen de una burbuja esférica aumenta a una velocidad constante de $5\,\text{cm}^3\,\text{s}^{-1}$.

Se puede suponer que el volumen inicial de la burbuja es cero.

Halle la velocidad (en $\text{cm}\,\text{s}^{-1}$) a la que está aumentando el radio de la burbuja cuando el volumen de la burbuja es igual a $20\,\text{cm}^3$.

7. [Puntuación máxima: 5]

La curva $y = 4\ln(x - 2)$ para $0 \le y \le 4$ se rota $360°$ alrededor del eje y para generar un sólido de revolución.

Halle el volumen del sólido así generado.

8. [Puntuación máxima: 10]

Sea $z = 1 + \cos 2\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, 2\theta$, donde $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

(a) Muestre que:

(i) $\arg z = \theta$

(ii) $|z| = 2\cos\theta$ [7]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el valor de θ para el que se cumple que $\arg(z^2) = |z^3|$. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. [Puntuación máxima: 8]

Considere la curva $y = \dfrac{x-4}{ax^2+bx+c}$, donde a, b y c son constantes distintas de cero.

La curva tiene un mínimo local en $(2\,,\,1)$ y una asíntota vertical cuya ecuación es $x = 1$.

Halle los valores de a, b y c.

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 15]

Una tienda vende bombones. El peso (en kilogramos) de los bombones que compra un cliente aleatorio se puede modelizar mediante una variable aleatoria continua X cuya función de densidad de probabilidad f viene dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{85}\left(4+3x-x^2\right), & 0{,}5\le x\le 3\\ 0, & \text{resto de los casos}\end{cases}.$$

(a) Halle la moda de X. [2]

(b) Halle $\mathrm{P}(1\le X\le 2)$. [2]

(c) Halle la mediana de X. [3]

La tienda vende los bombones a los clientes a un precio de $25\,\$$ por kilogramo.

Sin embargo, si el peso de los bombones que compra un cliente es de al menos $0{,}75$ kilogramos, la tienda se los vende a un precio rebajado de $24\,\$$ por kilogramo.

(d) Halle la probabilidad de que un cliente elegido al azar se gaste como mucho $48\,\$$. [3]

(e) Halle la cantidad esperada de gasto por cliente. Dé la respuesta redondeando al número de céntimos más próximo. [5]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 17]

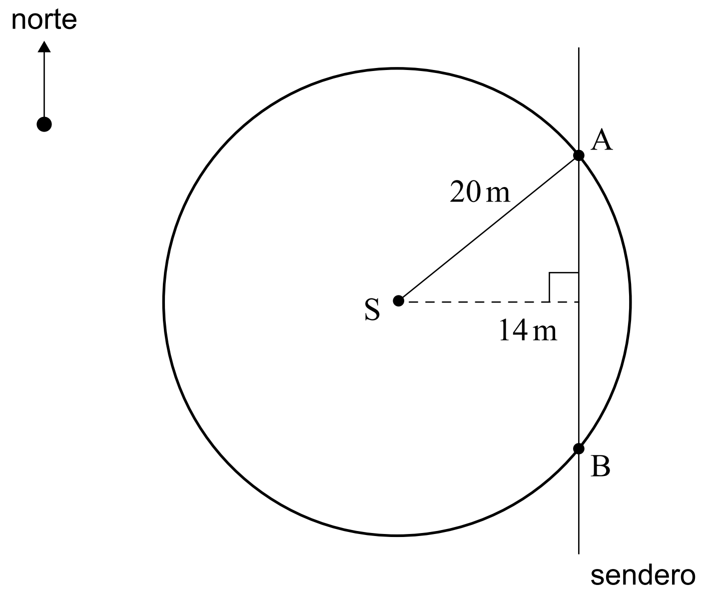
Un aspersor giratorio se encuentra en el punto fijo S.

Riega todos los puntos que están dentro de y sobre una circunferencia de 20 metros de radio.

El punto S se encuentra a 14 metros del borde de un sendero que discurre en dirección norte-sur.

El borde del sendero corta a la circunferencia en los puntos A y B.

Esta información se muestra en la siguiente figura.



(a) Muestre que $\mathrm{AB} = 28{,}57$, redondeando a cuatro cifras significativas. [3]

El aspersor gira con una velocidad constante de una revolución cada 16 segundos.

(b) Muestre que el aspersor gira un ángulo de $\frac{\pi}{8}$ radianes en un segundo. [1]

Sea T segundos el tiempo que se está regando $[\mathrm{AB}]$ en cada revolución.

(c) Halle el valor de T. [4]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 11: continuación)

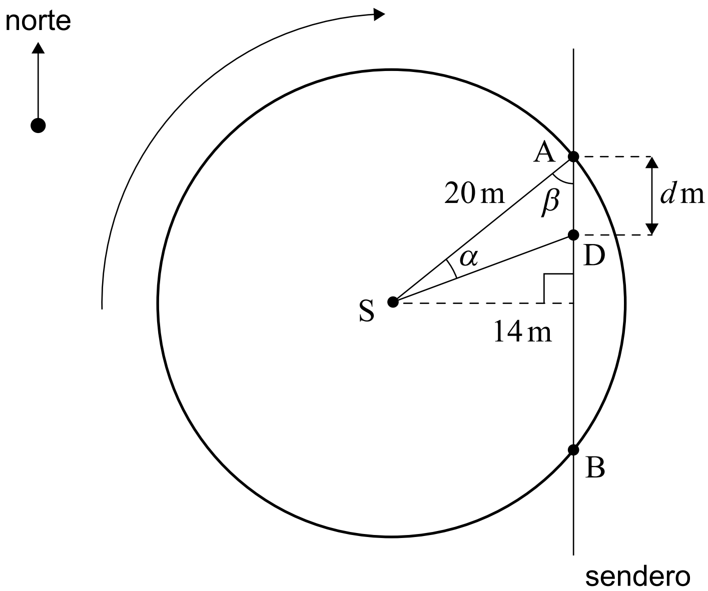
Considere una revolución del aspersor en el sentido de las agujas del reloj.

En el instante $t = 0$, el agua pasa por el borde del sendero en A.

En el instante t segundos, el agua pasa por el borde del sendero en un punto móvil D que está a una distancia de d metros al sur del punto A.

Sea $\alpha = \mathrm{A\hat{S}D}$ y $\beta = \mathrm{S\hat{A}B}$, donde α, β se miden en radianes.

Esta información se muestra en la siguiente figura.



(d) Escriba una expresión que dé α en función de t. [1]

Se sabe que $\beta = 0{,}7754$ radianes, redondeando a cuatro cifras significativas.

(e) Aplicando el teorema del seno a $\Delta\mathrm{ASD}$, muestre que la distancia d en el instante t se puede modelizar mediante

$$d(t) = \frac{20\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{8}\right)}{\mathrm{sen}\left(2{,}37 - \frac{\pi t}{8}\right)}.$$ [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 11: continuación)

Una tortuga va caminando hacia el sur por el borde del sendero.

En el instante t segundos, la distancia (g metros al sur de A) a la que está la tortuga se puede modelizar mediante:

$$g(t) = 0{,}05t^2 + 1{,}1t + 18 \text{, donde } t \geq 0.$$

(f) En el instante $t = 0$, indique a qué distancia al sur de A está la tortuga. [1]

Sea w la distancia que hay entre la tortuga y el punto D en el instante t segundos.

(g) (i) Utilice las expresiones de $g(t)$ y $d(t)$ para escribir una expresión que dé w en función de t.

(ii) A partir de lo anterior, halle en qué instante y en qué lugar del sendero alcanza el agua a la tortuga por primera vez. [4]

No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 21]

Considere la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\operatorname{cosec} 2x = \sqrt{\tan x}$, donde $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{4}$ para $x = \frac{\pi}{4}$.

(a) Utilice el método de Euler con un paso de $\frac{\pi}{12}$ para hallar un valor aproximado de y para $x = \frac{5\pi}{12}$. Dé la respuesta redondeando a tres cifras significativas. [3]

(b) Muestre que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\ln(\cot x)\right) = -\operatorname{cosec} 2x$. [4]

(c) Muestre que $\sqrt{\cot x}$ es un factor integrante para esta ecuación diferencial. [4]

(d) A partir de lo anterior, y resolviendo la ecuación diferencial, muestre que $y = x\sqrt{\tan x}$. [5]

(e) Considere la curva $y = x\sqrt{\tan x}$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ y la aproximación que calculó en el apartado (a) con el método de Euler.

(i) Halle la coordenada y para $x = \frac{5\pi}{12}$. Dé la respuesta redondeando a tres cifras significativas.

(ii) Considerando la pendiente de la curva, sugiera una razón por la cual con el método de Euler no se obtiene una buena aproximación de la coordenada y para $x = \frac{5\pi}{12}$.

(iii) Indique por qué motivo esta aproximación es menor que la coordenada y para $x = \frac{5\pi}{12}$. [3]

(f) Considerando $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\operatorname{cosec} 2x = \sqrt{\tan x}$, deduzca que la curva $y = x\sqrt{\tan x}$ tiene una pendiente positiva para $0 < x < \frac{\pi}{2}$. [2]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.