

© International Baccalaureate Organization 2024

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2024

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2024

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Superior

Prueba 3

6 de mayo de 2024

Zona A tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 24]

Si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son derivables, entonces su producto es derivable y esas dos funciones satisfacen la regla del producto: $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$.

En esta pregunta le mostraremos ejemplos de pares de funciones derivables, $f(x)$ y $g(x)$, que también satisfacen $(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$.

En el apartado (a), considere $f(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$, donde $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$, y $g(x) = x^2$, donde $x \in \mathbb{R}$.

(a) (i) Halle una expresión para $f'(x)$. [2]

(ii) Muestre que $f'(x)g'(x) = \frac{4x}{(2-x)^3}$. [2]

(iii) Muestre que $f(x)g'(x) + g(x)f'(x) = \frac{4x}{(2-x)^3}$. [4]

En los apartados (b) y (c), considere dos funciones no constantes $f(x)$ y $g(x)$, donde $f(x) > 0$ y $g(x) \neq g'(x)$.

(b) Reorganizando la ecuación $f(x)g'(x) + g(x)f'(x) = f'(x)g'(x)$, muestre que $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g'(x) - g(x)}$. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

- (c) A partir de lo anterior, e integrando los dos miembros de $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g'(x) - g(x)}$, muestre que $f(x) = Ae^{\left(\int \frac{g'(x)}{g'(x) - g(x)} dx\right)}$, donde A es una constante positiva arbitraria. [2]

El resultado obtenido en el apartado (c) se puede utilizar para hallar pares de funciones, $f(x)$ y $g(x)$, que satisfagan **las dos** condiciones siguientes:

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \text{ y } (f(x)g(x))' = f'(x)g'(x).$$

En los apartados (d) y (e), utilice el resultado del apartado (c) con $A = 1$.

- (d) Considere $g(x) = xe^x$.

Halle una función $f(x)$ tal que $f(x)$ y $g(x)$ satisfagan las dos ecuaciones anteriores. [5]

- (e) Considere $g(x) = \sin x + \cos x$.

Halle una función $f(x)$ tal que $f(x)$ y $g(x)$ satisfagan las dos ecuaciones anteriores dentro del dominio $0 < x < \pi$.

Dé la respuesta en la forma $f(x) = \sqrt{e^x h(x)}$, donde $h(x)$ es una función que tiene que determinar. [7]

2. [Puntuación máxima: 31]

En esta pregunta le pedimos que halle la probabilidad de que el gráfico de una función cuadrática generada al azar tenga un número dado de intersecciones con el eje x .

En los apartados (a) – (f), considere funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ cuyos coeficientes a , b y c se generan al azar tirando un dado equilibrado de seis caras tres veces y tomando el valor que aparece en la cara superior del dado.

Por ejemplo, si al tirar el dado saliera un 2, un 3 y un 5, la función cuadrática resultante sería $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$.

- (a) Explique por qué existen 216 funciones cuadráticas distintas que se pueden generar utilizando este método. [1]

- (b) El conjunto de coeficientes $a = 1$, $b = 4$ y $c = 4$ se ha generado al azar para dar lugar a la función cuadrática $f(x) = x^2 + 4x + 4$.

Verifique que el gráfico de f solo tiene una intersección con el eje x . [2]

- (c) Considerando el discriminante, o de cualquier otro modo, muestre que la probabilidad de que el gráfico de una función cuadrática generada al azar de esta manera tenga solo una intersección con el eje x es igual a $\frac{5}{216}$. [6]

Considere ahora las funciones cuadráticas generadas al azar cuyos gráficos tienen dos intersecciones **distintas** con el eje x .

- (d) Considerando el discriminante, determine el conjunto de posibles valores de ac . [3]

- (e) (i) Para el caso en el que $ac = 1$, muestre que existen cuatro funciones cuadráticas cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x . [1]

- (ii) Para el caso en el que $ac = 2$, muestre que existen ocho funciones cuadráticas cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x . [2]

Sea p la probabilidad de que el gráfico de una función cuadrática generada al azar de esta manera tenga dos intersecciones distintas con el eje x .

- (f) Utilizando el enfoque que se inició en el apartado (e), o de cualquier otro modo, halle el valor de p . [6]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

En los apartados (g) y (h), considere una función cuadrática generada al azar $f(x) = x^2 + 2Zx + 1$, donde la variable aleatoria continua $Z \sim N(0, 1)$.

(g) Halle la probabilidad de que el gráfico de f tenga dos intersecciones con el eje x . [3]

Las variables aleatorias continuas X_1 y X_2 representan las intersecciones con el eje x del gráfico de f , donde $X_1 = -Z - \sqrt{Z^2 - 1}$ y $X_2 = -Z + \sqrt{Z^2 - 1}$.

(h) Sabiendo que el gráfico de f tiene dos intersecciones con el eje x (X_1 y X_2), halle la probabilidad de que ambos valores (X_1 y X_2) sean mayores que 0,5. [7]
