

© International Baccalaureate Organization 2024

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2024

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2024

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

# Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación

## Nivel Superior

### Prueba 2

2 de mayo de 2024

Zona A mañana | Zona B mañana | Zona C mañana

2 horas

---

#### Instrucciones para los alumnos

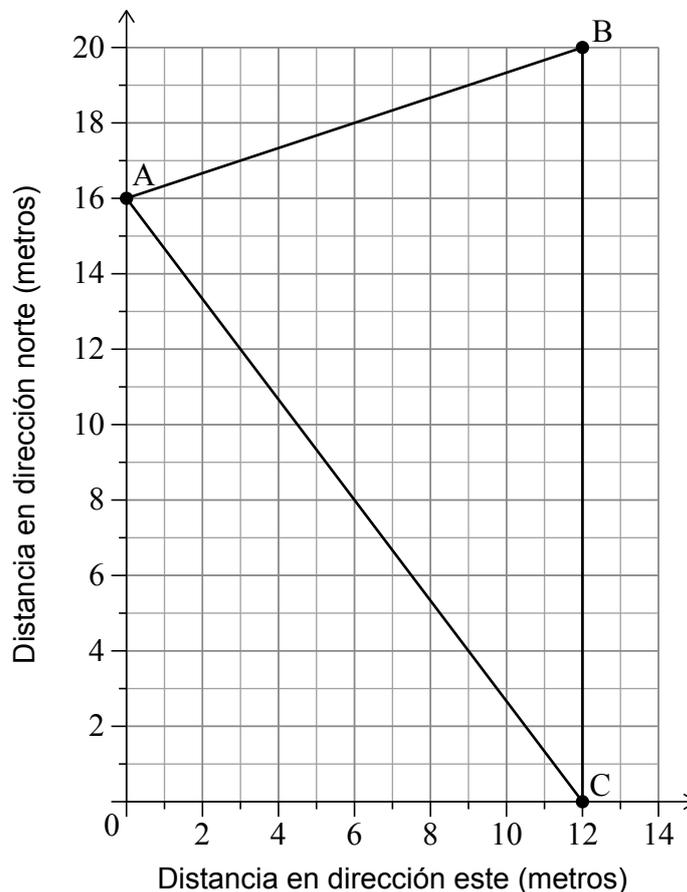
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada pregunta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 14]

Mai está en un parque de atracciones. En los siguientes ejes de coordenadas aparece representado el mapa de una parte del parque de atracciones.

Las tres atracciones preferidas de Mai están situadas en  $A(0, 16)$ ,  $B(12, 20)$  y  $C(12, 0)$ . Todas las mediciones están en metros.



- (a) Escriba la distancia que hay entre B y C. [1]
- (b) Calcule la distancia que hay entre A y B. [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

Mai está de pie en la atracción situada en B y quiere caminar directamente hasta la atracción situada en A.

(c) Calcule la demora de A desde B. [3]

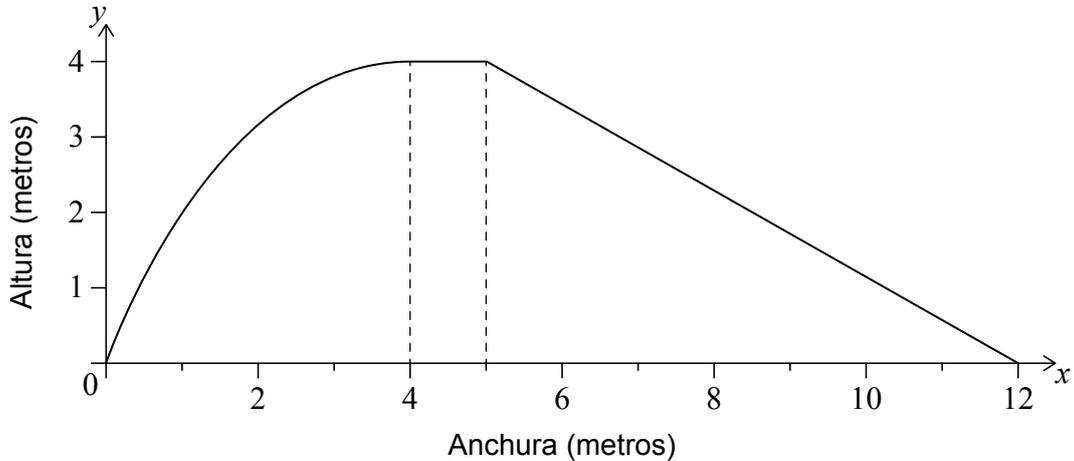
Se va a instalar una fuente para beber en un punto que esté equidistante de las tres atracciones situadas en A, B y C.

- (d) (i) Escriba la pendiente de [AC].
- (ii) Escriba el punto medio de [AC].
- (iii) A partir de lo anterior, calcule las coordenadas de la fuente para beber. [8]

Página en blanco

2. [Puntuación máxima: 15]

La siguiente figura muestra un modelo del perfil lateral de un tobogán acuático. Todas las longitudes se dan en metros.



El borde curvado del tobogán se puede modelizar mediante la función

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x \text{ para } 0 \leq x \leq 4.$$

El resto del tobogán se puede modelizar mediante la función

$$g(x) = \begin{cases} 4, & \text{para } 4 \leq x \leq 5 \\ \frac{48}{7} - \frac{4x}{7}, & \text{para } 5 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

- (a) Utilice la regla del trapecio —con intervalos de anchura 1— para calcular el área aproximada bajo el perfil del tobogán, dentro del intervalo  $0 \leq x \leq 4$ . [5]
- (b) Halle  $\int \left( -\frac{1}{4}x^2 + 2x \right) dx$ . [3]
- (c) Calcule el valor exacto del área bajo todo el perfil del tobogán, para  $0 \leq x \leq 12$ . [4]
- (d) Halle el porcentaje de error que se comete en el área **total** bajo todo el perfil del tobogán, cuando se usa el valor aproximado del apartado (a). [3]

3. [Puntuación máxima: 22]

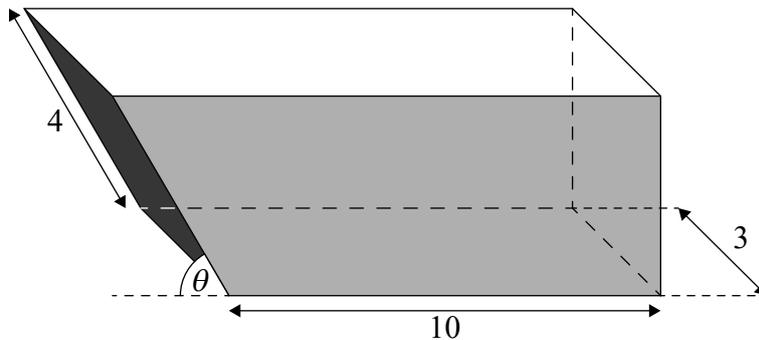
Un volquete es un contenedor utilizado para transportar escombros fuera de una obra. Por motivos de seguridad los escombros no deben sobrepasar la parte superior del volquete. Por consiguiente, el máximo volumen de escombros que se puede retirar de la obra es igual al volumen del volquete.



Un diseño particular de volquete se puede modelizar como un prisma cuya sección transversal es un trapecio. Para que el volquete se pueda transportar, debe tener una base rectangular de 10 m de largo y 3 m de ancho. El borde inclinado tiene una longitud fija de 4 m y forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal.

La siguiente figura muestra un volquete de este tipo.

la figura no está dibujada a escala



(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

**(Pregunta 3: continuación)**

- (a) Halle el volumen de este volquete:
- (i) Si la longitud del borde superior del volquete es igual a 11 m.
  - (ii) Si la altura del volquete es igual a 3,2 m.
  - (iii) Si  $\theta$  es igual a  $\frac{\pi}{3}$ . [9]
- (b) Muestre que el volumen del volquete ( $V\text{m}^3$ ) viene dado por:
- $$24 \operatorname{sen}(\theta)(5 + \cos(\theta)).$$
- [2]
- (c) Explique, en contexto, por qué  $\theta \neq 0$ . [1]
- (d) (i) Dibuje aproximadamente el gráfico de  $V = 24\operatorname{sen}(\theta)(5 + \cos(\theta))$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .
- (ii) Halle el máximo volumen del volquete y el valor de  $\theta$  para el cual se obtiene este volumen máximo. [4]
- (e) Muestre, mediante derivación, que ese volumen máximo se obtiene para un valor de  $\theta$  que satisface la ecuación  $2 \cos^2 \theta + 5 \cos \theta - 1 = 0$ . [6]

4. [Puntuación máxima: 12]

Un inspector de higiene vive en la Ciudad A y tiene que visitar restaurantes de cinco ciudades distintas (B–F) antes de regresar a A. El inspector no puede pasar dos veces por ninguna de las ciudades. Las distancias (en km) que hay entre esas seis ciudades se muestran en la siguiente tabla.

	A	B	C	D	E	F
A		31	28	26	22	23
B	31		25	20	27	25
C	28	25		19	22	24
D	26	20	19		21	22
E	22	27	22	21		24
F	23	25	24	22	24	

- (a) Empezando en A, utilice el algoritmo del vecino más cercano para hallar un límite superior para la longitud del viaje que tiene que hacer el inspector. Indique el orden en el que tiene que ir visitando las ciudades. [4]
- (b) Tras borrar A, utilice el algoritmo de Prim empezando en B para hallar un límite inferior para la longitud del viaje que tiene que hacer el inspector. [5]
- (c) Partiendo del árbol generador minimal que halló en el apartado (b), determine si el viaje correspondiente a este límite inferior es una solución alcanzable. [3]

5. [Puntuación máxima: 16]

Los conductores de una empresa de reparto pueden aparcar la furgoneta por la noche en la sede central de la empresa o en su casa.

Urvashi es uno de los conductores de esta empresa. Si Urvashi, en un día dado, ha aparcado la furgoneta en la sede central por la noche, la probabilidad de que al siguiente día aparque la furgoneta en la sede central es 0,88. Si Urvashi, en un día dado, ha aparcado la furgoneta en su casa por la noche, la probabilidad de que al siguiente día aparque la furgoneta en su casa es 0,92.

- (a) Escriba la matriz de transición ( $T$ ) que refleje los movimientos de la furgoneta de Urvashi entre su casa y la sede central. [2]

El lunes **por la mañana** recogió la furgoneta de la sede central, donde había estado aparcada por la noche.

- (b) Halle la probabilidad de que la furgoneta de Urvashi esté aparcada en su casa el viernes **por la noche**, tras haber acabado su semana laboral. [3]

- (c) Escriba el polinomio característico de la matriz  $T$ . Dé su respuesta en la forma  $\lambda^2 + b\lambda + c$ . [2]

- (d) Calcule los vectores propios de la matriz  $T$ . [4]

- (e) Escriba dos matrices ( $P$  y  $D$ , donde  $D$  es una matriz diagonal) para las que se cumpla que  $T = PDP^{-1}$ . [2]

- (f) A partir de lo anterior, halle la probabilidad a largo plazo de que la furgoneta de Urvashi esté aparcada en su casa. [3]

Página en blanco

6. [Puntuación máxima: 14]

El número triangular  $k$ -ésimo ( $T_k$ ) se define así:  $T_k = \sum_{r=1}^k r$ .

- (a) (i) Calcule el valor del quinto número triangular ( $T_5$ ).
- (ii) Determine una fórmula para  $T_k$  que sea de la forma  $ak^2 + bk$ . [4]
- (b) (i) Halle el valor de  $T_5 + T_4$ .
- (ii) Halle la expresión más simplificada posible para  $T_k + T_{k-1}$ . [3]

Una bolsa contiene 15 discos rojos y 10 discos azules; todos ellos son idénticos excepto por el color. Se escogen al azar dos discos de la bolsa, sin reposición.

- (c) Calcule la probabilidad de que los dos discos sean de colores distintos. [3]

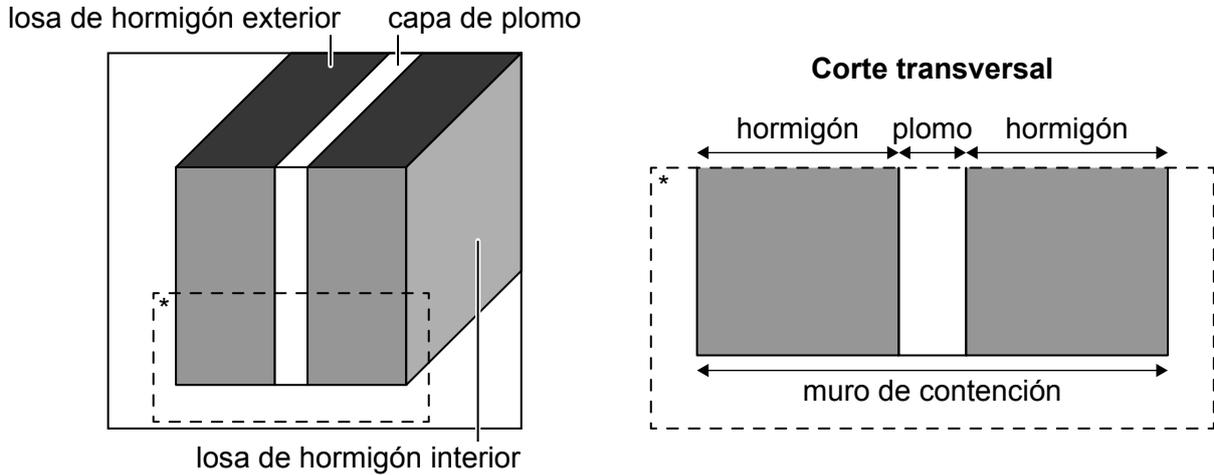
Una bolsa contiene  $T_k$  discos rojos y  $T_{k-1}$  discos azules; todos ellos son idénticos excepto por el color. Se escogen al azar dos discos de la bolsa, sin reposición.

- (d) Muestre que la probabilidad de que los dos discos sean de colores distintos es independiente de  $k$ . [4]

7. [Puntuación máxima: 17]

Los muros de contención que protegen frente a la radiación se construyen a partir de dos losas de hormigón paralelas que tienen una capa de plomo entre ellas, tal y como se muestra en la figura.

la figura no está dibujada a escala



La anchura de una losa de hormigón sigue una distribución normal de media 350 mm y desviación típica igual a 10 mm.

- (a) Halle la probabilidad de que una losa de hormigón elegida al azar tenga una anchura menor que 340 mm. [2]
- (b) Halle los extremos del intervalo —simétrico respecto a la media— para el que se cumple que el 95 % de las losas tienen una anchura que está dentro de este intervalo. [3]

Stephen supone que la anchura de la capa de plomo también sigue una distribución normal, pero en este caso de media 100 mm y desviación típica igual a 5 mm, y que es independiente de la anchura de las losas.

Sea  $W$  la variable aleatoria que representa la anchura total del muro, medida en mm.

- (c) (i) Sabiendo que las anchuras de dos losas de hormigón cualesquiera son independientes y utilizando el modelo de Stephen, calcule la media y la desviación típica de  $W$ .
- (ii) A partir de lo anterior, halle  $P(780 < W < 810)$ . [7]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 7: continuación)**

Existe la preocupación de que la media y la desviación típica del modelo de Stephen de la capa de plomo sean incorrectas. Sin embargo, su suposición de que el modelo es una distribución normal y que la anchura del plomo es independiente de la anchura de las losas de hormigón sigue siendo válida.

Un estudio ha concluido que la anchura total del muro de contención sigue una distribución normal de media 810 mm y desviación típica igual a 16 mm. El modelo referido a la anchura de las losas de hormigón no cambia.

(d) Utilice los resultados sobre la **suma** de variables aleatorias independientes para hallar un valor revisado para:

(i) La media de la anchura de la capa de plomo.

(ii) La desviación típica de la anchura de la capa de plomo. [4]

Con este modelo revisado, el 80% de las capas de plomo tienen una anchura menor que  $k$  mm.

(e) Calcule el valor de  $k$ . [1]

---

**Advertencia:**

Los contenidos usados en las evaluaciones del IB provienen de fuentes externas auténticas. Las opiniones expresadas en ellos pertenecen a sus autores y/o editores, y no reflejan necesariamente las del IB.

**Referencias:**

3. Andyqwe, s.f. *Dumpster truck* [imagen en línea] Disponible en: <https://www.gettyimages.co.uk/detail/photo/dumpster-truck-royalty-free-image/157611454> [Consulta: 18 de abril de 2023]. Material original adaptado.

Los demás textos, gráficos e ilustraciones: © Organización del Bachillerato Internacional, 2024