

© International Baccalaureate Organization 2024

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2024

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2024

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

# Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación

## Nivel Medio

### Prueba 2

2 de mayo de 2024

Zona A mañana | Zona B mañana | Zona C mañana

1 hora 30 minutos

---

#### Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación NM** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[80 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada pregunta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 16]

En una semana dada, el número de alumnos de un colegio de educación primaria concreto que faltó a clase a causa de los piojos ( $P$ ), la gripe ( $G$ ) y/o la varicela ( $V$ ) fueron los que se detalla a continuación.

El colegio de educación primaria tiene 500 alumnos.

- 35 alumnos tuvieron piojos únicamente.
- 20 alumnos tuvieron gripe únicamente.
- 5 alumnos tuvieron varicela únicamente.
- 4 alumnos tuvieron piojos y gripe pero no varicela.
- 2 alumnos tuvieron piojos y varicela pero no gripe.
- 3 alumnos tuvieron gripe y varicela pero no piojos.
- 1 alumno tuvo piojos, gripe y varicela.

(a) Dibuje con precisión un diagrama de Venn que represente esta información. [3]

(b) Calcule el número de alumnos que no tuvo piojos ni gripe ni varicela. [2]

Se escoge un alumno al azar de entre todos los alumnos del colegio.

(c) Halle la probabilidad de que este alumno tenga:

(i) Piojos.

(ii) Gripe, sabiendo que el alumno tiene piojos. [4]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

Diego es un profesor de ese colegio. Cree que el número de alumnos ( $n$ ) que ha tenido gripe en los  $t$  primeros días del curso escolar se puede modelizar mediante la función

$$n(t) = 250 - 240(2)^{kt}, k \in \mathbb{R}.$$

- (d) Utilice el modelo de Diego para calcular el número de alumnos que empezaron el curso escolar con gripe. [2]

Se sabe que en los 10 primeros días del curso escolar, hubo 130 alumnos que tuvieron gripe.

- (e) Halle el valor de  $k$ . [2]

- (f) Utilizando este modelo, calcule cuántos días transcurrirán desde el inicio del curso escolar hasta que haya 200 alumnos que hayan tenido gripe. [2]

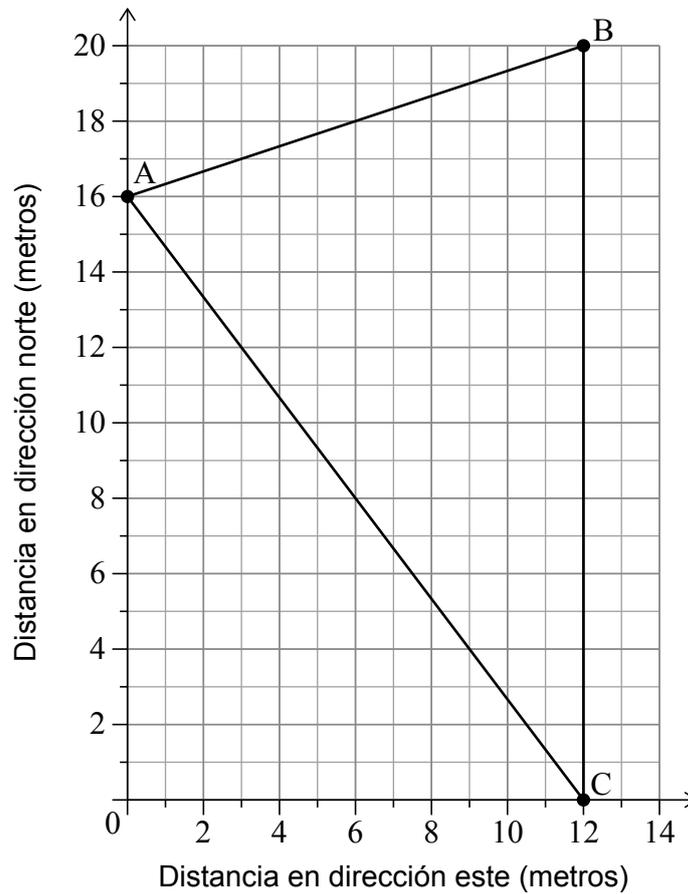
Cuando llega el último día del curso escolar, se sabe que hay 300 alumnos que han tenido gripe.

- (g) Comente lo adecuado que resulta el modelo de Diego. [1]

2. [Puntuación máxima: 14]

Mai está en un parque de atracciones. En los siguientes ejes de coordenadas aparece representado el mapa de una parte del parque de atracciones.

Las tres atracciones preferidas de Mai están situadas en  $A(0, 16)$ ,  $B(12, 20)$  y  $C(12, 0)$ . Todas las mediciones están en metros.



(a) Escriba la distancia que hay entre B y C. [1]

(b) Calcule la distancia que hay entre A y B. [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

Mai está de pie en la atracción situada en B y quiere caminar directamente hasta la atracción situada en A.

(c) Calcule la demora de A desde B. [3]

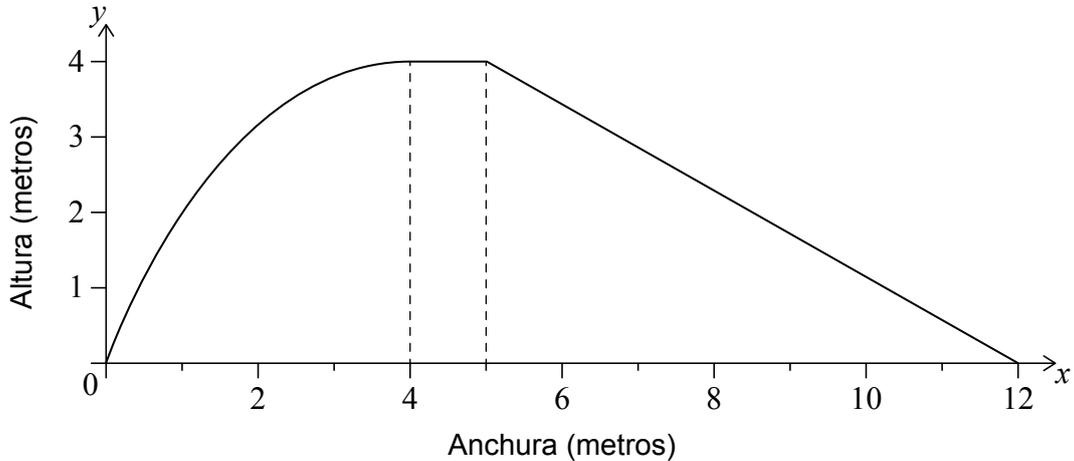
Se va a instalar una fuente para beber en un punto que esté equidistante de las tres atracciones situadas en A, B y C.

- (d) (i) Escriba la pendiente de [AC].
- (ii) Escriba el punto medio de [AC].
- (iii) A partir de lo anterior, calcule las coordenadas de la fuente para beber. [8]

Página en blanco

3. [Puntuación máxima: 15]

La siguiente figura muestra un modelo del perfil lateral de un tobogán acuático. Todas las longitudes se dan en metros.



El borde curvado del tobogán se puede modelizar mediante la función

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x \text{ para } 0 \leq x \leq 4.$$

El resto del tobogán se puede modelizar mediante la función

$$g(x) = \begin{cases} 4, & \text{para } 4 \leq x \leq 5 \\ \frac{48}{7} - \frac{4x}{7}, & \text{para } 5 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

- (a) Utilice la regla del trapecio —con intervalos de anchura 1— para calcular el área aproximada bajo el perfil del tobogán, dentro del intervalo  $0 \leq x \leq 4$ . [5]
- (b) Halle  $\int \left( -\frac{1}{4}x^2 + 2x \right) dx$ . [3]
- (c) Calcule el valor exacto del área bajo todo el perfil del tobogán, para  $0 \leq x \leq 12$ . [4]
- (d) Halle el porcentaje de error que se comete en el área **total** bajo todo el perfil del tobogán, cuando se usa el valor aproximado del apartado (a). [3]

4. [Puntuación máxima: 19]

Un estudio reciente halló que la altura de las mujeres holandesas se puede modelizar mediante una distribución normal de media 170,7 cm y desviación típica igual a 6,3 cm.

Se escoge al azar a una mujer holandesa.

(a) Calcule la probabilidad de que su altura:

(i) Sea menor que 160 cm.

(ii) Esté comprendida entre 160 cm y 170 cm.

[4]

El 27% de las mujeres holandesas tienen una altura mayor que  $h$  metros.

(b) Calcule el valor de  $h$ .

[2]

Janneke toma una muestra aleatoria compuesta por 200 mujeres holandesas de Ámsterdam y mide sus alturas. Quiere determinar si esta muestra podría provenir de una población cuyas alturas siguieran una distribución normal de media 170,7 cm y desviación típica igual a 6,3 cm.

Para ello realiza una prueba  $\chi^2$  de determinación de la bondad del ajuste, a un nivel de significación del 5%. Empieza por elaborar la siguiente tabla de frecuencias.

Altura ( $h$ )	Frecuencia observada	Frecuencia esperada
$h \leq 160$	6	8,943
$160 < h \leq 170$	85	$a$
$170 < h \leq 180$	92	$b$
$h > 180$	17	13,99

(c) Calcule, redondeando a cuatro cifras significativas, el valor de:

(i)  $a$ .

(ii)  $b$ .

[2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 4: continuación)**

Las hipótesis de la prueba de Janneke son:

$H_0$ : las alturas provienen de una población que sigue una distribución normal de media 170,7 cm y desviación típica igual a 6,3 cm.

$H_1$ : las alturas no provienen de una población que siga una distribución normal de media 170,7 cm y desviación típica igual a 6,3 cm.

- (d) Escriba el número de grados de libertad de esta prueba. [1]

El valor crítico para esta prueba es 7,815.

- (e) Realice la prueba  $\chi^2$  de determinación de la bondad del ajuste. A continuación, indique su conclusión y justifique su razonamiento. [4]

Gundega afirma que, en promedio, las mujeres letonas son más altas que las mujeres holandesas.

Se elige una muestra aleatoria de 10 mujeres letonas y otra de 10 mujeres holandesas y miden sus alturas.

Alturas de las mujeres letonas (cm)									
171	163	180	159	169	182	166	168	171	170

Alturas de las mujeres holandesas (cm)									
173	182	181	166	175	161	169	165	172	169

Gundega realiza una prueba  $t$  de Student a un nivel de significación del 5%. Se supone que las poblaciones siguen una distribución normal y tienen la misma varianza.

- (f) Escriba para esta prueba la hipótesis nula y la hipótesis alternativa. [2]

- (g) Realice la prueba  $t$  de Student. A continuación, indique su conclusión y justifique su razonamiento. [4]

5. [Puntuación máxima: 16]

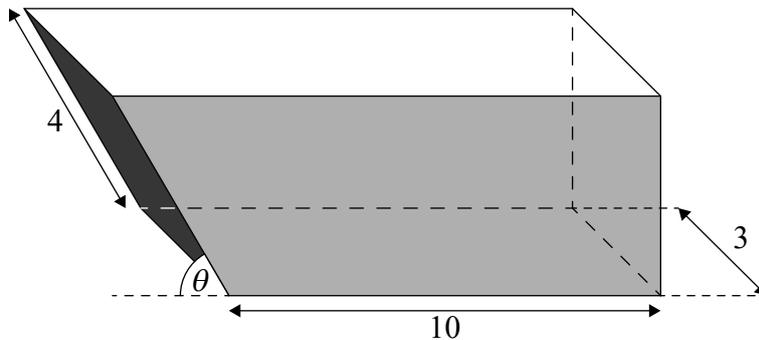
Un volquete es un contenedor utilizado para transportar escombros fuera de una obra. Por motivos de seguridad los escombros no deben sobrepasar la parte superior del volquete. Por consiguiente, el máximo volumen de escombros que se puede retirar de la obra es igual al volumen del volquete.



Un diseño particular de volquete se puede modelizar como un prisma cuya sección transversal es un trapecio. Para que el volquete se pueda transportar, debe tener una base rectangular de 10 m de largo y 3 m de ancho. El borde inclinado tiene una longitud fija de 4 m y forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal.

La siguiente figura muestra un volquete de este tipo.

la figura no está dibujada a escala



(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

**(Pregunta 5: continuación)**

- (a) Halle el volumen de este volquete:
- (i) Si la longitud del borde superior del volquete es igual a 11 m.
  - (ii) Si la altura del volquete es igual a 3,2 m.
  - (iii) Si  $\theta$  es igual a  $60^\circ$ . [9]
- (b) Muestre que el volumen del volquete ( $V\text{m}^3$ ) viene dado por:
- $$24 \operatorname{sen}(\theta)(5 + \cos(\theta)).$$
- [2]
- (c) Explique, en contexto, por qué  $\theta \neq 0$ . [1]
- (d) (i) Dibuje aproximadamente el gráfico de  $V = 24 \operatorname{sen}(\theta)(5 + \cos(\theta))$ ,  $0 < \theta < 90^\circ$ .
- (ii) Halle el máximo volumen del volquete y el valor de  $\theta$  para el cual se obtiene este volumen máximo. [4]
- 

**Advertencia:**

Los contenidos usados en las evaluaciones del IB provienen de fuentes externas auténticas. Las opiniones expresadas en ellos pertenecen a sus autores y/o editores, y no reflejan necesariamente las del IB.

**Referencias:**

5. Andyqwe, s.f. *Dumpster truck* [imagen en línea] Disponible en: <https://www.gettyimages.co.uk/detail/photo/dumpster-truck-royalty-free-image/157611454> [Consulta: 18 de abril de 2023] Material original adaptado.

**Los demás textos, gráficos e ilustraciones: © Organización del Bachillerato Internacional, 2024**