

© International Baccalaureate Organization 2024

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2024

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2024

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

# Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación

## Nivel Superior

### Prueba 3

6 de mayo de 2024

Zona A tarde | Zona B tarde | Zona C tarde

1 hora

---

#### Instrucciones para los alumnos

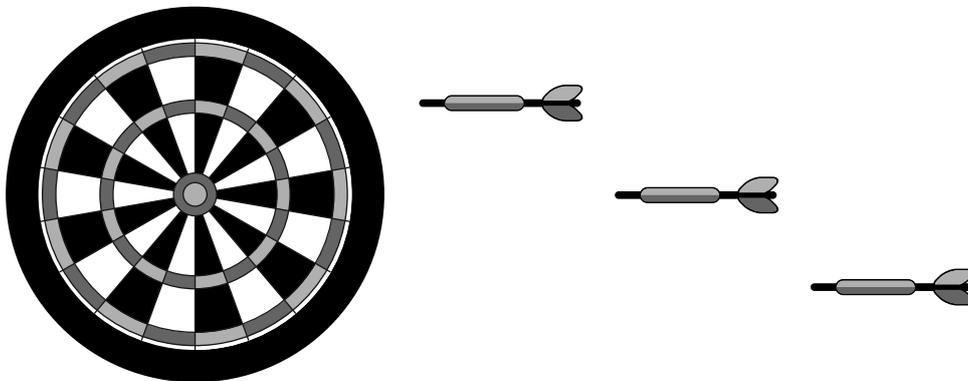
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

Conteste **las dos** preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada pregunta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 24]

**En la siguiente pregunta se analizan los cambios en las puntuaciones de los jugadores de dardos utilizando dos pruebas estadísticas.**

En el juego de los dardos, los jugadores —por turnos— lanzan dardos a una diana con el fin de conseguir puntos.



El “promedio de tres dardos” de un jugador se refiere a la media de las puntuaciones que consigue al lanzar tres dardos.

Valia quiere averiguar si los jugadores de dardos no profesionales de su ciudad mejoran a lo largo de un período de 12 meses. Si su “promedio de tres dardos” aumenta, eso indicará una mejora.

Elige una muestra aleatoria compuesta por ocho jugadores de dardos y anota la media de su “promedio de tres dardos” del Año 1.

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

A continuación anota la media de su “promedio de tres dardos” del Año 2.

Los resultados que obtiene Valia son los siguientes:

**Tabla 1**

Jugador	Media del Año 1	Media del Año 2
Justin	68,1	70,1
Fallon	72,2	72,0
Rob	65,8	65,0
Michael	73,7	74,9
Mensur	69,8	68,0
Deta	64,5	68,0
Meaghan	69,2	70,6
Peter	64,9	92,9

Valia calcula, para cada año, la mediana, los cuartiles y el rango intercuartil. Los resultados se muestran en la **Tabla 2**.

**Tabla 2**

	Media del Año 1	Media del Año 2
<b>Primer cuartil</b>	65,35	68
<b>Mediana</b>	68,65	<i>a</i>
<b>Tercer cuartil</b>	71	<i>b</i>
<b>Rango intercuartil</b>	5,65	<i>c</i>

(a) Determine los valores de *a*, *b* y *c*. [3]

(b) Comparando los resultados de uno y otro año que aparecen resumidos en la **Tabla 2**, indique —en contexto— una conclusión que podría estar justificado que hiciera Valia. [1]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

A continuación, Valia decide analizar los datos de la **Tabla 1** utilizando una prueba  $t$  de Student de una cola para muestras pareadas a un nivel de significación del 10% para determinar si los promedios de los jugadores han aumentado.

- (c) Indique una suposición —referida a las diferencias entre las medias— que haya que hacer para que la prueba sea válida. [1]
- (d) (i) Indique la hipótesis nula y la hipótesis alternativa para esa prueba. [2]
- (ii) Halle el valor del parámetro  $p$ . [2]
- (iii) Indique, en el contexto de la pregunta, la conclusión de la prueba y justifique su respuesta. [2]
- (e) Indique una manera en la que Valia podría haber reducido la probabilidad de cometer:
  - (i) Un error de tipo I. [2]
  - (ii) Un error de tipo II. [2]

Valia no está segura de que la suposición hecha en el apartado (c) fuera correcta y, por consiguiente, piensa que los resultados de su prueba  $t$  de Student para muestras pareadas podrían no ser válidos.

Tras investigar un poco más, Valia decide utilizar la prueba de los rangos con signo de Wilcoxon, para la que no necesita la suposición que hizo en el apartado (c).

Para esta prueba, las magnitudes de las diferencias entre las medias del Año 2 y del Año 1 se ordenan y se les asignan un rango del 1 al 8, estando los rangos de las diferencias positivas ( $P$ ) y los rangos de las diferencias negativas ( $N$ ) en distintas columnas.

Esto se muestra parcialmente en la siguiente tabla, que Valia elabora para realizar la prueba.

Media del Año 1	Media del Año 2	Diferencia	$P$	$N$
68,1	70,1	2,0	$A$	
72,2	72,0	-0,2		1
65,8	65,0	-0,8		2
73,7	74,9	1,2	3	
69,8	68,0	-1,8		$B$
64,5	68,0	3,5	$C$	
69,2	70,6	1,4	$D$	
64,9	92,9	28	8	
<b>Total</b>			$\sum P = 28$	$\sum N$

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

(f) Determine los valores de:

(i)  $A, B, C$  y  $D$ . [3]

(ii)  $\sum N$ . [1]

Para esta prueba:

- El estadístico de la prueba de los rangos con signo de Wilcoxon es  $T =$  el valor más pequeño de entre  $\sum P$  o  $\sum N$ .
- La hipótesis nula es que la mediana de la población, para el “promedio de tres dardos”, es la misma en los dos años.

Valia decide realizar la prueba a un nivel de significación del 5%. A partir de tablas estadísticas, determina que la región crítica es  $T \leq 5$ .

(g) (i) Indique la hipótesis alternativa  $H_1$  para esta prueba. [1]

(ii) Escriba el valor del estadístico de esta prueba ( $T$ ). [1]

(iii) Determine, en el contexto de la pregunta, cuál es la conclusión de la prueba. [2]

(h) Para una de esas dos pruebas, sugiera brevemente cómo podría Valia evaluar la fiabilidad de los resultados obtenidos. [1]

2. [Puntuación máxima: 31]

**En la siguiente pregunta se explora un posible método para dibujar retratos de fase para sistemas acoplados no lineales, tomando como ejemplo concreto un modelo depredador-presa.**

El parque natural Gander Green contiene una población de ocas checas ( $x$ , medida en centenares) y una población de zorros grises ( $y$ , medida en centenares).

Los estudios realizados indican que el crecimiento de la población de ocas y de la población de zorros se puede modelizar mediante las siguientes ecuaciones diferenciales, en las que  $t$  se mide en años:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x - \frac{xy}{2} \\ \frac{dy}{dt} &= -3y + xy \end{aligned} \right\} \text{ para } x, y \geq 0$$

(a) En un instante concreto hay 500 ocas y 500 zorros, representado aquí mediante el par de coordenadas  $(5, 5)$ . En este instante, determine la razón de cambio de la población de:

(i) Ocas. [2]

(ii) Zorros. [1]

Hay dos puntos de equilibrio para estas poblaciones:  $A(0, 0)$  y  $B(p, q)$ .

(b) (i) Explique por qué  $A$  es un punto de equilibrio. [1]

(ii) Halle el valor de  $p$  y el valor de  $q$ . [3]

En los puntos cercanos a  $A(0, 0)$ , podemos ignorar los términos en  $xy$ , de modo que el sistema se puede aproximar por:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x \\ \frac{dy}{dt} &= -3y \end{aligned} \right\} \text{ para } x, y \geq 0.$$

(c) Resolviendo estas dos ecuaciones diferenciales:

(i) Halle una expresión que dé  $x$  en función de  $t$ . [4]

(ii) Halle una expresión que dé  $y$  en función de  $t$ . [1]

(d) (i) Utilizando las respuestas que dio en el apartado (c), muestre que las trayectorias de los retratos de fase cercanas a  $A$  pueden describirse mediante la ecuación  $x^3 y^2 = k$ , donde  $k$  es una constante positiva. [3]

(ii) A partir de lo anterior, dibuje aproximadamente —en un retrato de fase— una posible trayectoria para valores pequeños de  $x$  e  $y$ . [3]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

Considere ahora los puntos  $(x, y)$  que están cerca de B en el plano de fases. Estas coordenadas se pueden reescribir así:  $x = p + X$  e  $y = q + Y$ , donde  $p$  y  $q$  son los valores del apartado (b)(ii).

- (e) Sustituyéndolos en el modelo original, muestre que para valores pequeños de  $X$  e  $Y$ :

$$\dot{X} \approx -\frac{3Y}{2}. \quad [3]$$

De manera similar, se puede demostrar que  $\dot{Y} \approx 4X$ .

- (f) Sabiendo que  $\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ , donde  $\mathbf{M}$  es una matriz cuadrada, escriba  $\mathbf{M}$ . [1]

- (g) Hallando los valores propios de  $\mathbf{M}$ , describa el recorrido de las trayectorias cercanas al punto B. [4]

- (h) A partir de lo anterior, dibuje aproximadamente un conjunto completo de trayectorias en el plano de fases correspondiente al modelo original, donde se indiquen claramente los dos puntos de equilibrio. [3]

- (i) En este parque natural, en un instante concreto, hay 500 ocas checas y 500 zorros grises.

Basándose en los valores hallados en el apartado (a), el cuidador del parque natural está preocupado y supone que las ocas morirán todas rápidamente. Sugiera si el modelo respalda (o no) esta suposición. Justifique su respuesta. [2]

**Advertencia:**

Los contenidos usados en las evaluaciones del IB provienen de fuentes externas auténticas. Las opiniones expresadas en ellos pertenecen a sus autores y/o editores, y no reflejan necesariamente las del IB.

**Referencias:**

1. Panimoni, 2022. *Volume Target icon in flat style on color background. Darts game. Arrow in the center aim. Vector design element for you business projects.* [imagen en línea] Disponible en: <https://www.gettyimages.co.uk/detail/illustration/volume-target-icon-in-flat-style-on-color-royalty-free-illustration/1044319572> [Consulta: 21 de febrero de 2022]. Material original adaptado.

**Los demás textos, gráficos e ilustraciones: © Organización del Bachillerato Internacional, 2024**